3

Lesbrief 3: Relativiteitstheorie uit de Wetten van Newton

3.1 Introductie

Wat we in de laatste Lesbrief hebben gezien is wat ik graag de 'schoolboek'-afleiding van de Speciale Relativiteitstheorie noem. Aannemen dat licht voor iedere waarnemer met dezelfde snelheid gaat, en dan met wat gedachtenexperimenten tot de formules komen voor tijdrek en lengtekrimp.
Deze afleiding heeft zo zijn aantrekkingskracht: eenvoudig te volgen, gemakkelijk te visualiseren omdat iedereen bekend is met licht, en de wiskunde is ook niet zo moeilijk. Ideaal dus om uit te leggen in een klaslokaal! Maar bij nader inzien kloppen er een aantal dingen niet helemaal, en dit zou zelfs kunnen leiden tot misvattingen bij de leerlingen, en soms zelfs bij de leraren!

Want waarom is licht eigenlijk zo belangrijk bij die afleiding? Relativiteitstheorie geldt toch óók voor andere verschijnselen dan licht? Sterker nog, de Relativiteitstheorie geldt in de hele natuurkunde. Uiteindelijk is relativiteit een theorie over ruimte en tijd, niet over wat er in ruimte en tijd beweegt. Dit is de reden waarom het ook van toepassing is op de natuurkunde waar licht geen rol speelt, en het is ook de reden waarom we kunnen verwachten dat Speciale Relativiteitstheorie kan worden afgeleid zonder licht te gebruiken. Hoog tijd dus om een afleiding te laten zien waarin licht geen enkele rol speelt. Maar we zullen wel érgens moeten beginnen. Verrassend genoeg, blijkt dat de Eerste Wet van Newton te zijn.

3.2 Drie misconcepten uit de licht-afleiding

Laten we even terugkeren naar de afleiding die we vaak in de lessen terugzien: de aanname doen dat licht voor iedere waarnemer met dezelfde snelheid gaat, en dan met wat gedachtenexperimenten tot de formules komen voor tijdrek en lengtekrimp.

Een scherpzinnige leerling kan moeite hebben met het accepteren van deze formules. We hebben de afleiding immers gedaan door heel specifieke gedachte-experiment te doen en vervolgens te claimen dat de uitkomsten ook in alle andere gevallen waar zijn. Het is alsof je de Stelling van Pythagoras bewijst door te laten zien dat deze geldt voor één specifieke driehoek (een met zijden 3, 4 en 5 doet dat prima) en vervolgens te beweren dat deze dan ook wel voor alle andere driehoeken waar zal zijn. Dat is inderdaad wel zo, maar *bewezen* is het op die manier niet. We hebben één voorbeeld genomen (een lichtstraal in een trein) en de resultaten ervan (de formule voor tijdrek, bijvoorbeeld) gepromoveerd tot algemene geldigheid. Dat is gebrekkige logica!

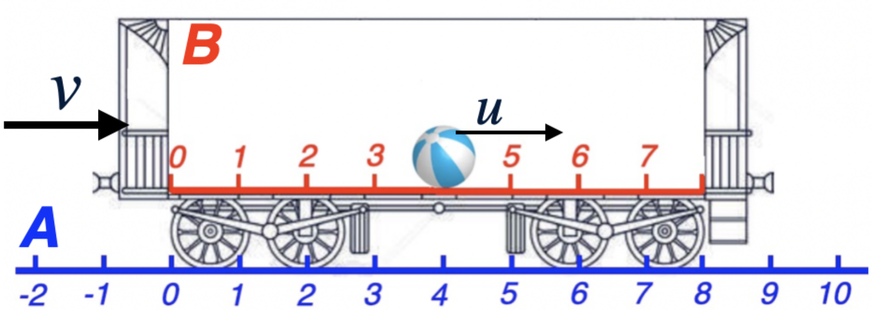
Een tweede vraag die een scherpzinnige student zou kunnen stellen is: zijn de effecten van de relativiteitstheorie te wijten aan het feit dat het enige tijd nodig heeft om zich te verplaatsen van bron naar ons oog? Tijddilatatie bijvoorbeeld. Rekt de tijd écht uit als ik naar een bewegende klok kijk, of duurt het gewoon een tijdje voordat ik de klok zie omdat het licht van de klok naar mijn oog moet reizen, en terwijl de klok verder reist, duurt het steeds langer voor licht om de reis naar mijn oog te maken. Een goede vraag, want in de schoolboekenuitleg maken we duidelijk gebruik van de reistijd van licht: we hebben expliciet een gedachte-experiment gedaan waarin we licht van de ene kant van een

treinwagon naar de andere laten bewegen. Een leerling zou dus tot de conclusie kunnen komen dat de relativiteitstheorie het gevolg is van de reistijd van licht. En dat is niet zo.
Ten slotte wekt de lichtstralen-uitleg de indruk dat de Speciale Relativiteitstheorie alleen geldt als massa's met constante snelheid bewegen. Maar dat klopt niet: de Speciale Relativiteitstheorie geldt prima voor massa's die versnellen. Nee, de Speciale Relativiteitstheorie geldt wanneer een waarnemer zich in een inertiaalstelsel bevindt. Dit hadden we al gezien in Lesbrief 1 als één van de redenen waarom de Eerste Wet van Newton zo belangrijk is omdat we anders geen inertiaalstelsels kunnen identificeren. Pas als het waarnemersstelsel een niet-inertiaalstelsel is, is de Algemene Relativiteitstheorie nodig. Maar niets van dit alles blijkt duidelijk uit de lichtstralen-afleiding.

Ik denk dus dat het een didactisch nut heeft om een afleiding van de Speciale Relativiteitstheorie te doen waarin helemaal geen licht wordt gebruikt. Geen gedachte-experimenten, geen stellingen over de lichtsnelheid, zelfs niet dat licht bestaat! Het voordeel van zo'n afleiding is dat de regels die we dan vinden, voor álle natuurkunde op zullen gaan. Het stapje dat we daarna makkelijk kunnen maken, is dat de Speciale Relativiteitstheorie een eigenschap is van tijd en ruimte zélf.

3.3 De Speciale Relativiteitstheorie, afgeleid uit de Eerste Wet van Newton

Laten we beginnen. We nemen twee inertiaalstelsels, A en B, zoals in het plaatje beneden. Omdat het allebei inertiaalstelsels zijn, moet de snelheid v tussen de stelsels noodzakelijkerwijs constant zijn.



We nemen een massa (ik heb er maar weer eens een bal van gemaakt),

en we laten hem met een bepaalde snelheid u bewegen. Die snelheid is niet hetzelfde in beide stelsels, en ik geef daarom een labeltje mee aan de snelheid u: gezien vanuit stelsel A heeft de bal een snelheid u_A, en vanuit stelsel B een snelheid u_B. Natuurlijk is het ook zo dat de afgelegde afstand in de twee stelsels niet hetzelfde is, en we geven die daarom ook dat labeltje mee. Tenslotte zullen we ook nog aannemen dat de hoeveelheid verstreken tijd Δt in de twee stelsels wel eens verschillend kan zijn, dus ook die geven we die labeltjes mee. Overigens neem ik niet per sé aan dat die tijdsduren anders zijn; misschien is er tijdrek, misschien niet. Dat is precies waar we achter hopen te komen.
We zullen eenvoudigweg de vraag stellen: als we de afstand Δx_A kennen die de bal in het A-systeem heeft afgelegd, kunnen we dan berekenen wat de afstand Δx_B is zoals gezien in het B-systeem? En als we weten hoeveel seconden Δt_Adit in systeem A duurde, kunnen we dan berekenen hoeveel seconden Δt_B dit in systeem B duurde? Dat wil zeggen: wat zijn de formules voor Δx en Δt in het B-systeem gegeven Δx en Δt in het A-systeem? Je hoeft er maar kort over na te denken dat Δx en Δt in B hoogstens kunnen afhangen van Δx en Δt in A *tot de eerste macht*. Dit moet, anders breken we de Eerste Wet van Newton. Kijk maar: als de machten hoger zouden zijn dan de eerste, zouden hun resulterende afgeleiden snelheden u_A en u_B opleveren die niet-constant zijn. Maar als de bal geen netto krachten heeft, moet hij in beide systemen met constante snelheid bewegen. De waarde van die snelheid is verschillend in de twee stelsels, maar dát het in beide constant is, staat buiten kijf. De Eerste Wet van Newton vertelt ons dus dat de transformatieformules tussen afstanden en tijdsduren van deze *lineaire* vorm moeten zijn. In formules uitgedrukt:

$$\Delta x_B = \beta \, \Delta x_A + \sigma \, \Delta t_A \tag{3.1}$$

$$\Delta t_B = \gamma \, \Delta t_A + \kappa \, \Delta x_A . \tag{3.2}$$

Merk op dat er hier vier onbekenden zijn: γ, κ, β, en σ. We weten nog niet wat ze zijn. Misschien is $\gamma = 1$ en is $\kappa = 0$. In dat geval is de hoeveelheid tijd hetzelfde in beide inertiaalstelsels en krijgen we de Newtoniaanse regels terug, zonder tijdrek. Maar, misschien hebben ze andere waarden. Hoe kunnen we daar achter komen?

Uit de wiskunde weten we dat als je vier onbekenden hebt, je vier voorwaarden nodig hebt om hun waarden te vinden. We kunnen deze gemakkelijk verkrijgen, uit het postulaat van Einstein dat alle inertiaalstelsels even geldig zijn.

3.4 Vier constanten opgelost uit vier speciale gevallen

Het is het makkelijkst om deze opgave te doen door eerst een formule te vinden waarmee de snelheid van de bal in het A-stelsel omgeschreven kan worden naar die in het B-stelsel. Dat is een makkelijk sommetje: snelheid is niks anders dan de afgelegde afstand gedeeld door de tijdsduur, en die formules die hadden we boven al gevonden. Door ze op elkaar te delen vinden we meteen

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} \\ &= \frac{\beta\,\Delta x_A + \sigma\,\Delta t_A}{\gamma\,\Delta t_A + \kappa\,\Delta x_A} \end{aligned} \tag{3.3}$$

en als we ook nog Δt_A wegdelen, herkennen we in de breuk de snelheid $u_A = \Delta x_A / \Delta t_A$ van de bal in het A-stelsel:

$$u_B = \frac{\beta\,u_A + \sigma}{\gamma + \kappa\,u_A}. \tag{3.4}$$

Hiermee is een *snelheidsomrekenformule* gevonden: als we de snelheid van de bal weten in stelsel A, dan berekenen we hiermee de snelheid van de bal in stelsel B.
Hiermee kunnen we aan de slag om twee van de vier constanten te vinden! Zoals we al zagen, hoeven we alleen vier speciale situaties te bekijken. Om deze lesbrief niet te lang te maken doe ik er hier twee in detail voor; de andere twee zijn uitgewerkt op een website waar ik naar zal verwijzen.

Hier is zo'n speciale situatie.
Stel dat we de bal in Stelsel B stil laten staan. Dan zal de bal in Systeem A een snelheid v hebben. We weten dus dat als $u_B = 0$, dan $u_A = v$. Dat kunnen we in onze snelheidstransformatieformule invullen. Dan zien we dat dat een breuk is, die gelijk moet zijn aan nul. En breuken, die zijn nul als hun teller dat is. We vinden daarom meteen dat β en σ aan elkaar vast moeten zitten:

$$\sigma = -v\,\beta. \tag{3.5}$$

Geweldig! Het betekent dat als we β weten, de waarde van σ óók bekend is. Eigenlijk hebben we daarom niet vier onbekende constanten, maar slechts drie.
Laten we nog zo'n speciale situatie bekijken. Deze keer leggen we de bal stil in Systeem A. Dan zal de bal in Systeem B een snelheid $-v$ hebben. We weten dus dat als $u_A = 0$, dan is $u_B = -v$. Dit ingevuld in

de snelheidstransformatieformule geeft ons dat de constanten σ en γ aan elkaar vast zitten:

$$\sigma = -v\,\gamma. \tag{3.6}$$

Mooi! Als we σ weten, dan weten we γ óók. Dat betekent dat we nóg een constante minder hebben. In plaats van de vier oorspronkelijke, hoeven we alleen nog maar β en κ te bepalen.

Daarvoor kunnen we nog twee speciale situaties bekijken. Ik zal die niet in wiskundig detail uitwerken (dat doe ik op een website), maar alleen de resultaten geven.
Hier is de derde speciale situatie. Via onze stelseltransformaties kunnen we alles uit systeem A omschrijven naar systeem B. Wat als we de coordinaten van de bal omschrijven van systeem A naar systeem B, en meteen daaropvolgend een die uitkomsten weer terug omschrijven van Systeem B naar Systeem A? Dan moet daar precies hetzelfde uitkomen als wanneer we gewoon in systeem A hadden blijven zitten. In wiskunde uitgedrukt, levert dat een derde formule op waarmee de vier constanten aan elkaar vastzitten:

$$\gamma\,\beta - \sigma\,\kappa = 1. \tag{3.7}$$

Even pas op de plaats maken, want de drie formules die we nu hebben gevonden kunnen al bijna worden opgelost. Uit 3.5 en 3.6 volgt meteen dat $\gamma = \beta$, en dit ingevuld in 3.7 volgt $\gamma^2 = 1 - v\gamma\kappa$. Als we κ kunnen vinden weten we alles!
De laatste speciale situatie is wanneer we een derde inertiaalstelsel erbij nemen: systeem C. Wat nu als we onze transformatieformules gebruiken om de tijdsduren en afstanden uit systeem A omschrijven naar die in Systeem B, en vervolgens de transformatieformules nóg eens gebruiken om de tijdsduren en afstanden om te schrijven naar die in Systeem C? Die totale uitkomst moet dan wel hetzelfde resultaat opleveren als dat we maar één transformatie hadden uitgevoerd: in één keer van systeem A naar systeem C. Eigenlijk passen we hier het Principe van Relativiteit toe: door te stellen dat beide manieren om van A naar C te transformeren gelijkwaardig zijn, gebruiken we de gelijkwaardigheid van inertiaalstelsels. In wiskunde uitgedrukt, knoopt deze speciale situatie de constanten voor een vierde keer en laatste keer aan elkaar:

$$\kappa = -a\,\gamma\,v. \tag{3.8}$$

Dit was het laatste waar we nog naar zochten! Met deze κ ingevuld in $\gamma^2 = 1 - v\gamma\kappa$ vinden we gratis en voor niks:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tag{3.9}$$

en hiermee, uit 3.5, 3.6, en 3.8, hebben we ook die andere constanten te pakken:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad \kappa = \frac{-a\,v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad \sigma = \frac{-v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{3.10}$$

En daarmee zijn onze vier onbekenden gevonden! Het zal je trouwens opvallen dat er een nieuw getalletje in de formules staat: een c. Deze is uit de afleiding komen vallen[1]. Het is nu verleidelijk om te denken dat dat de lichtsnelheid wel zal zijn. En dat is het ook! Alleen hebben we die er niet *ingestopt*, maar is die er zelf uit komen rollen. Maar, goed om te bedenken dat de waarde van dit getalletje nog niet is bepaald, of dat die dezelfde waarde moet hebben voor alle waarnemers. Dat zullen we nu onderzoeken.

[1] HIER KORTE AFLEIDING

3.5 Een speciale snelheid is nu gevonden!

Nu de vier constanten gevonden zijn, kunnen we ze terug invullen in de transformatieformules waarmee we begonnen waren. Die worden dan

$$\begin{aligned} \Delta t_B &= \gamma\left(\Delta t_A + \frac{v}{c^2}\,\Delta x_A\right), \\ \Delta x_B &= \gamma\left(\Delta x_A + v\,\Delta t_A\right), \end{aligned} \tag{3.11}$$

waarin $\gamma = 1/\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$.

Dit is bijzonder! Het zijn namelijk precies de Lorentz-transformaties, die Einstein zelf afleidde in zijn beroemde artikel uit 1905, en die we in Lesbrief 2 ook al hadden gezien aan de hand van Einsteins postulaat over lichtsnelheid. Alleen, deze keer hebben we geen licht gebruikt, *alleen het begrip inertiaalstelsels*, waarvan de Eerste Wet van Newton zeggen dat die bestaan en hoe we die kunnen vinden. Dat maakt precies waarom de Speciale Relativiteitstheorie in alle inertiaalstelsels waar moeten zijn, en voor alle natuurkunde die zich daarin afspeelt.
Nu die gekke constante c nog. De waarde daarvan kunnen we niet bepalen aan de hand van onze afleiding. Maar, we kunnen wél zien dat het een snelheid moet zijn. Kijk maar, we kunnen alleen getalletjes bij elkaar optellen als ze dezelfde eenheid hebben, en dan zien we meteen aan de formule voor γ dat c de eenheid van een snelheid moet hebben. Veel mooier nog, is dat we kunnen aantonen dat de snelheid c dezelfde waarde heeft in alle inertiaalstelsels. Dat zien we door de vier constanten in te vullen in de snelheidstransformatieformule. Die wordt

dan:

$$u_B = \frac{u_A + v}{1 + \frac{u_A v}{c^2}}. \tag{3.12}$$

Stel nu dat we de bal een snelheid c geven in Stelsel A. Dan vertelt deze formule dat de bal ook in Stelsel B die snelheid c heeft[2] De snelheid v tussen de twee inertiaalstelsels blijkt geheel onbelangrijk: die werd in de laatste stap weggedeeld en speelt dus geen rol in onze conclusie. Dat maakt dat de snelheid c ook in alle ándere inertiaalstelsels dezelfde waarde heeft. Oftewel, we hebben nu gevonden dat c invariant is! Wat bij Einsteins oorspronkelijk een postulaat was, blijkt dat een onnodige aanname: de Eerste Wet van Newton blijkt genoeg te zijn om tot deze conclusie te komen!

[2] Kijk maar: we vullen $u_A = c$ in, en vinden dan

$$u_B = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c}} = c\frac{1+v/c}{1+v/c} = c.$$

Oftewel: als iets in stelsel A met snelheid c beweegt, dan beweegt het ook in stelsel B met snelheid c.

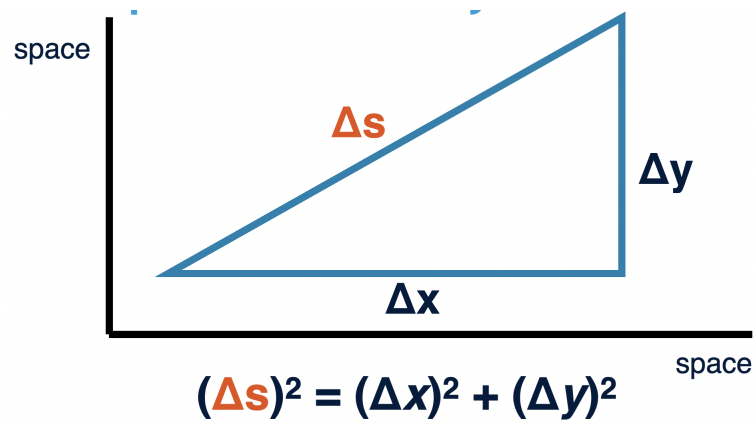
Blijft alleen nog de vraag over hoe we aan de getalswaarde van die speciale snelheid c komen. Zouden we dat kunnen doen door gewoon een lichtstraal op te meten? Wel, daarvoor moeten we aannemen dat licht met deze speciale c reist, en dat is nu juist wat we niét hebben aangenomen. Gelukkig kan de waarde van c ook bepaald worden zonder licht. Je zou bijvoorbeeld een stilstaande zandloper kunnen nemen, en opmeten hoe lang het duurt tot die leeggelopen is. Dat geeft ons[3] $\Delta\tau$, en daarna opmeten hoe lang Δt het leeglopen van de zandloper duurt als we de zandloper aan boord van een trein doen. Als we weten hoe snel v de trein beweegt, kunnen we die drie getallen invullen in de formule voor tijdrek, en terugrekenen wat de waarde is van c. En daar komt dan ons beroemde getalletje 300.000 km/s uit.

[3] Herinner je uit Lesbrief 2 dat we de Griekse letter τ gebruiken als we de tijdsduur bedoelen wanneer die gemeten wordt wanneer begin en eindpunt van een proces op dezelfde plek plaatsvindt; hier is dit de locatie van de zandloper.

3.6 Relativiteitstheorie als geometrie: Het Minkowski lijn-element

Met de coordinaattransformaties die we gevonden hebben, hebben we het hart van de Speciale Relativiteitstheorie in handen. En zoals we zagen zijn deze formules voor alle natuurkundige verschijnselen even waar, ook als er geen licht in voortkomt. Een andere manier om hetzelfde te zeggen, is dat deze formules eigenschappen zijn van tijd en ruimte zélf, niet van welk specifiek natuurkundig verschijnsel dan ook. We kunnen dit zelfs heel precies maken: we gaan onze formules omzetten in geometrie, in meetkunde! Niet alleen maakt dit heel duidelijk dat Speciale Relativiteitstheorie een *tijdruimte-theorie is*, maar zal ons dat in Lesbrief 5 helpen om de stap naar de Algemene Relativiteitstheorie te maken.

Laten we eerst even kijken naar een stukje geometrie uit de Newtoniaanse wereld. We tekenen een driehoek op een vlak papier, zoals in het plaatje beneden. Zoals we weten geldt in deze driehoek de Stelling van Pythagoras:



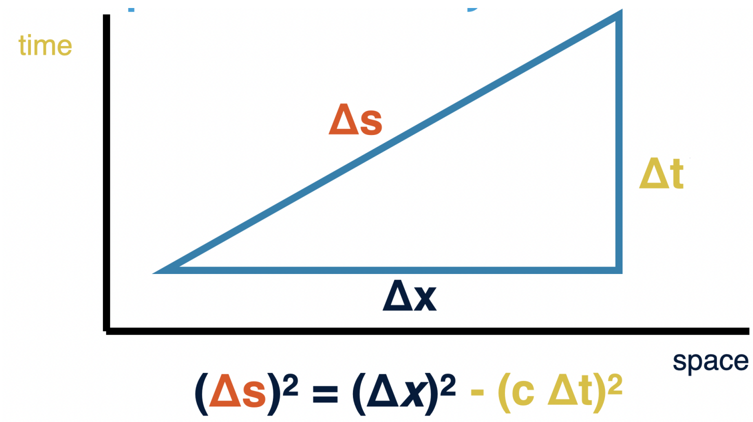
Als we de hoek van de driehoek aanpassen, verandert de lengte van de schuine zijde natuurlijk niet, maar wat er wél verandert is de lengte van de andere twee zijden. Interessant: door de hoek groter te maken, wordt Δx kleiner en tegelijkertijd wordt Δy kleiner, en dan precies zódanig dat hun combinatie nog steeds voldoet aan de Stelling van Pythagoras. Niet zo gek ook. Zet een leerling in het midden van een lokaal, en vraag naar het aantal meter tot aan de prullenbak in de hoek. Daarna draait de leerling om haar as, zodat de prullenbak vanuit haar oogpunt nu op een andere plek staat. Maar de afstand tot de prullenbak is er niet door veranderd.

Tot zover de Newtoniaanse wereld. Terug naar de Speciale Relativiteitstheorie! Mijn claim is nu, dat er ook dan een driehoek bestaat waarvan de schuine zijde altijd dezelfde waarde heeft. Maar, deze keer voldoet die driehoek aan een iets andere versie van de Stelling van Pythagoras. In plaats van de som van kwadraten, tellen we het *verschil van kwadraten* bij elkaar op:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 \tag{3.13}$$

Deze driehoek is, vanwege dat minteken tussen tijd en ruimte, niet zo makkelijk te tekenen op een vlak papier. Dat is precies wat het betekent als we zeggen dat iets een geometrie heeft: daarmee bedoelen we dat de regels van hoeken en afstanden aangepast zijn.

Dat deze nieuwe driehoek dezelfde waarde heeft voor de schuine zijde, is een makkelijk sommetje om aan te tonen. We weten namelijk hoe we Δx, Δt van het ene stelsel kunnen omschrijven naar die van het andere



stelsel: door onze coordinaattransformatieformules te gebruiken. Het is een kwestie van deze invullen en uitwerken, om te vinden dat

$$\Delta x_A^2 - \Delta t_A^2 = \Delta x_B^2 - \Delta t_B^2. \tag{3.14}$$

De schuine zijde Δs is dus inderdaad hetzelfde in beide stelsels. Deze schuine zijde heeft een speciale naam: het *Minkowski lijn-element*, naar de wiskundige die zag dat Einsteins Speciale Relativiteitstheorie herschreven kan worden in geometrie van driehoeken.

Net zoals bij 'gewone' driehoeken, waar de Stelling van Pythagoras voor geldt, kunnen we ook hier de hoek veranderen, waardoor de lengte van de ene zijde kan worden omgezet in de lengte van de andere. Tijd en ruimte kunnen zo in elkaar worden omgezet! Dit is, in geometrische termen, wat er gebeurt als er tijdrek of lengtekrimp plaatsvindt.
Daarmee kunnen we leuke opgaven doen. Zo kun je bijvoorbeeld makkelijk de formules voor lengtekrimp en tijdrek bepalen. Kijk maar. Laten we een klok nemen, en die bekijken vanuit een stelsel waarin de klok niet beweegt. Dan geldt dat de afstand Δx tussen twee tikken van de klok gelijk is aan nul; de hoeveelheid tijd noemen we $\Delta\tau$. In een ander inertiaalstelsel zal de klok niet op één plek blijven staan, maar weg bewegen met een snelheid v. De afstand $\Delta x'$ is dan dus $v \times \Delta t'$. Ingevuld in het Minkowski lijn-element en een beetje opschonen geeft dan $\Delta t' = \gamma\,\Delta\tau$, de formule voor tijdrek. Op deze manier kunnen we alle resultaten uit de Speciale Relativiteitstheorie terugvoeren naar deze nieuwe geometrische regel. Relativiteitstheorie is geometrie geworden!